

استاد : سید امیر میرموید

همکلاسی

Hamkelasi.ir

مبحث : جزوه فصل پنجم ریاضی دهم تابع

اثرهای حجم



مشکلات از حجم

فصل پنجم (تابع)

سید امیر میرموید

ارائه در نامه های فصل به فصل و بیان اشتباهات متداول

تمرینات و تستهای آموزشی، تمرینی و ارزیابی

تست های آزمون های بین المللی، کنکور داخل و خارج کشور

مقدمه ای کوتاه

پس از حدود ۱۰ سال تدریس ریاضی و دروس مهندسی در دانشگاه و مدارس برتر و شناخت نقاط ضعف و قوت دانش آموزان کنکوری در درس ریاضی، تصمیم گرفتم با تغییر کتاب های درسی جزوه ای کامل و جامع برای دانش آموزان عزیزم گردآوری نمایم. از آنجا که همواره به برابری آموزشی در کشور عزیزمان ایران اعتقاد داشتم مصمم شدم این جزوه را که انشالله به زودی به کتاب تبدیل خواهد شد از طریق فضای مجازی در دسترس تمام دانش آموزان علاقمند کشورم قرار بدهم.

افتخار من تربیت و همراهی شاگردانی با رتبه های برتر کنکور و همچنین دانشجویانی قوی و تمایزگراست که همه آنها را اکنون دوستان خود می دانم. امروز نیز هرکسی از این دست نوشته استفاده نماید به گروه بزرگ دوستان من اضافه خواهد شد.

هرگز فراموش نکنید که شما میتوانید، فقط باید با تمام وجود بخواهید...

سید امیر میرموید

تابستان ۱۳۹۶

Telegram: @XY_Riazi

استاد : سید امیر میرمویّد

همکلاسی

Hamkelasi.ir

مبحث : جزوه فصل پنجم ریاضی دهم تابع

I ♥ MATH

ریاضی دهم



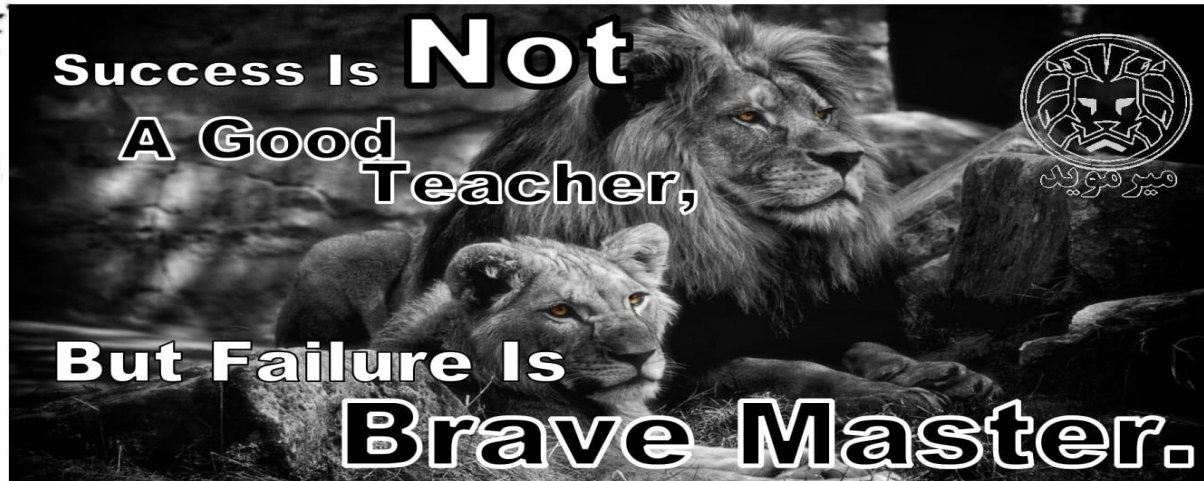
فصل پنجم

تابع:

- مفهوم تابع
- دامنه و برد
- انواع تابع



@XY_Riazi



کشورزی جوان یک اسب پیر داشت یک روز هنگام برگشتن به خانه چون مراقبتش نبود داخل چاهی بدون آب افتاد. کشورزی جوان هر چه سعی کرد نتوانست اسب را از چاه در آورد از طرفی دیش هم به حال اسب پیر می‌خواست که آن طور درد بکشد پس برای اینکه اسب زجر نکند فکری به ذهنش رسید با بیلی که در دست داشت خاکهای اطراف چاه را داخل چاه ریخت به این نیت که اسبش زیر خاکها مدفون شود و بمیرد!

اما اسب پیر هر بار که خاک روی بدنش می‌ریخت با نگاه دادن بدیش خاکها را پایین می‌ریخت و در عین حال خاکها را روی هم کپه می‌کرد و چند سانتی متر بالاتر می‌آمد. این کار همچنان ادامه پیدا کرد تا بالاخره ارتفاع خاک به لبه چاه رسید و اسب پیر در حالی که یک کوزه پیر از سکه طلا را به دندان گرفته بود از چاه خارج شد و کشورزی جوان تبدیل به مردی ثروتمند شد.

مشکلات زندگی مانند تلی از خاک بر سر ما می‌ریزند و آنها نیز دو انتخاب پیش رو دارند:

اول اینکه اجازه دهند مشکلات آنها را زنده به گور کند!

دوم آنکه از مشکلات سکوی بسازند برای رسیدن به خوشبختی!

شما کدام را انتخاب میکنید؟

درس اول : مفهوم تابع و بازنمای های آن

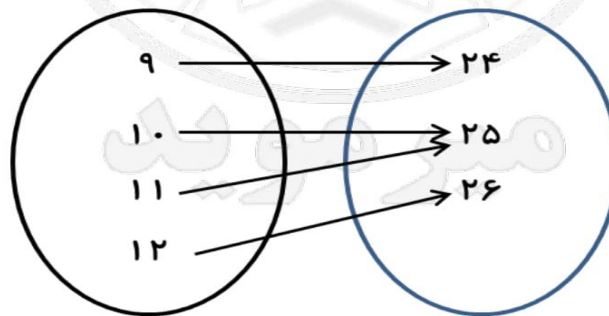
مفهوم تابع

بسیاری از پدیده ها در اطراف ما وجود دارند که به هم ارتباط دارند و به نوعی به هم وابسته اند. مثلا قیمت اجناس که در یک فروشگاه به هر کجا نسبت داده می شود و یا نمره ای که در کارنامه به هر درس نسبت داده می شود. اگر دمای یک اتاق را از ساعت ۹ تا ۱۲ هر یک ساعت اندازه گیری و ثبت کنیم در این صورت یک ارتباط ایجاد کرده ایم:

ساعت	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۲۵	۲۴	۲۴	۲۶

این رابطه را به صورت زوج مرتب و نمودار هم میتوان نشان داد.

$$f = \{(9, 25), (10, 24), (11, 24), (12, 26)\}$$



در برخی از ارتباط های که از آنها نام بردیم برای هر عبارتی که چیز به آن وابسته است تنها یک عدد میتواند قرار داد و نمیتوان دو یا چند عدد به آن نسبت داد. مثلا در کارنامه برای هر درس فقط یک نمره تعیین وجود دارد و یک درس همزمان نمیتواند دو نمره داشته باشد. اما ممکن است دو درس متفاوت نمره های یک نمره داشته باشند. به چنین رابطه های "تابع" میگویند.

مثلا در رابطه از وراج رسمی در ایران یک مرد حق دارد یک همسر داشته باشد و یا دو همسر مختلف داشته باشد. اما عکس این رابطه وجود نخواهد داشت.

رابطه رسمی از وراج ایرانی یک رابطه تابع است. اگر مرد فقط یک همسر داشته باشد رابطه از نوع یک به یک خواهد بود یعنی زن و مرد فقط با همسر خود در ارتباط هستند.

تعریف ریاضی تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A فقط دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شده باشد.

مثال: کدامیک از روابط زیر تابع می باشد و کدامیک تابع نمی باشد؟ (تخصص ۱۰۰)

(الف) رابطه ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد.

(ب) رابطه ای که به ضلع یک مربع، مساحت مربع را نسبت می دهد.

(ج) رابطه ای که به هر کارمند، همکاران او را نسبت می دهد.

(د) رابطه ای که به هر عدد، ریشه ششم آن را نسبت می دهد.

روش های نمایش تابع

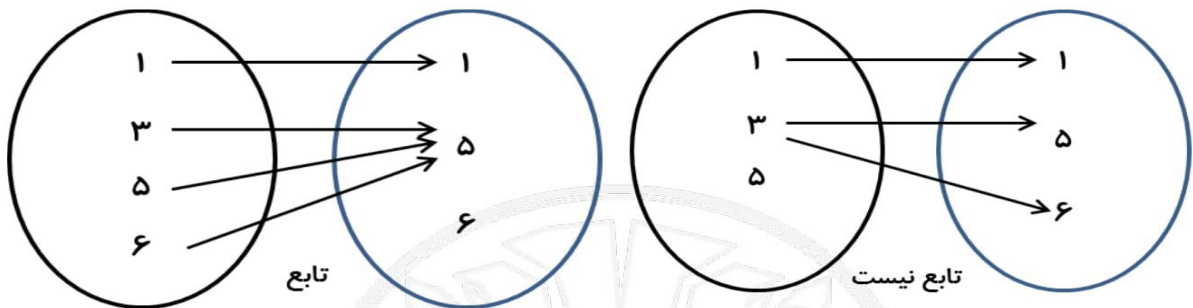
۱- نمایش جدولی

در این نوع نمایش دو ردیف عدد وجود دارد که برای هر عدد بالایی فقط یک عدد در ردیف دوم وجود دارد و هیچ عددی در ردیف بالا به دو عدد مختلف در پایین ارتباط ندارد.

معارف	ادبیات	انگلیسی	شیمی	فیزیک	ریاضی	درس
۹	۱۸	۱۸	۲۰	۱۹	۲۰	نمره

۲- نمایش تابع با نمودار ون

در این نوع نمایش مجموعه‌های در ارتباط را داخل بیضی‌های بسته جدا نشان دهیم و آنها را با فلش به هم وصل می‌نماییم. اما تنها نمودارهای ونی تابع را نشان می‌دهند که از هر عضو مجموعه اول فقط و فقط یک فلش خارج شده باشد. اما اگر به یک عضو از مجموعه دوم چندین فلش ختم شوند بازهم رابطه یک تابع است.



۳- نمایش تابع با زوج مرتب

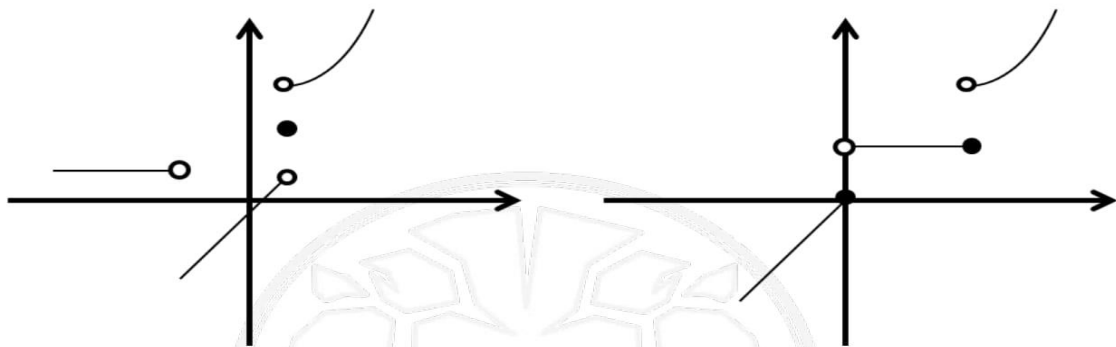
در این نوع نمایش مجموعه‌های در ارتباط را بصورت مختصات نشان می‌دهیم بطوری که اعضای مجموعه اول مولفه اول و اعضای مجموعه دوم مولفه دوم را تشکیل می‌دهند. اما تنها مجموعه زوج مرتب‌هایی تابع را نشان می‌دهند که برای هر مولفه اول فقط و فقط یک مولفه دوم وجود داشته باشد و در آن هیچ دو زوج مرتب با مولفه اول یکسان وجود نداشته باشد و چنانچه دو مولفه اول یکسان باشند بناچار (برای تابع بودن) مولفه‌های دوم آن‌ها نیز یکسان باشند. اما اگر یک مولفه دوم با چند مولفه اول مختلف آمده باشد بازهم رابطه یک تابع است.

$$f = \{(1, 3), (7, 6), (10, 6), (5, 5)\} \rightarrow \text{تابع}$$

$$f = \{(1, 3), (5, 6), (10, 9), (5, 5)\} \rightarrow \text{تابع نیست}$$

۴- نمودار مختصاتی

اگر زوج مرتب ها را بر روی محورهای مختصاتی رسم کنیم به این شیوه نمایش "نمودار مختصاتی" میگویند. اگر زوج مرتب ها به صورت نقطه یا خط هاین رسم می شوند. در این حالت تنها روابط تابع محسوب می شوند که همه خطوط عمودی (موازی محور y) یا نمودارها و نقطه ها را قطع کنند و یا فقط حداکثر در یک نقطه قطع کنند.



سوالات آموزشی:

۱) با مجموعه $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b\}$ (از A به B) رابطه های C به صورت جدولی، نمودار وون، زوج مرتب، و مختصاتی بنویسید که شرایط عنوان بالای ستون را داشته باشند. (تخصص ۱۰۰)

روش	تابع باشد	تابع نباشد
جدولی		
نمودار وون		
زوج مرتب		
نمودار مختصاتی		

تست کنکور:

۱- در رابطه $R = \{(x, y) | x < y\}$ مولفه هر زوج مرتب از مجموعه $A = \{m | m \in Z, m^2 \leq 4\}$ انتخاب می شوند. رابطه R چند عضو دارد؟ (ریاضی ۸۵)

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۲- رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in Z, |x| + |y| = 2\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟ (ریاضی ۸۸)

۴ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۳- رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in N, 2x + y \leq 7\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟ (ریاضی خارج ۸۸)


۵ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۴- رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m تابع است؟ (تجربی خارج ۸۵)

-۲ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (هیچکدام)

میرموید

There are no secrets to
It is the result of
hard work
And
learning from failure.



پیرمردی تنها در مزرعه ای زندگی می کرد . او می خواست مزرعه سبب زمینش اش را شخم بزند اما این کار خیلی سختی بود . تنها پسرش که می توانست به او کمک کند در زندان بود . پیرمرد نامه ای برای پسرش نوشت و وضعیت را برای او اینگونه توضیح داد :

پسر عزیزم من حال خوشی ندارم چون اصال نخواهم توانست سبب زمینم بکارم . من نمی خواهم این مزرعه را از دست بدهم . چون مادرت همیشه زمان کاشت محصول را دوست داشت . اگر تو اینجا بودی تمام مشکلات من حل می شد .
دوستدار تو پدر .

بعد مدتی پیرمرد این تلگراف را دریافت کرد :

پدر . به خاطر خدا مزرعه را شخم نزن ، من آنجا اسلحه پنهان کرده ام .

۴ صبح فردا ۱۲ نفر از مأموران زندان و افسران پلیس محلی آمدند و تمام خاک مزرعه را زیرورو کردند بدون اینکه اسلحه ای پیدا کنند . بعد از مدتی پیرمرد نامه دیگری دریافت کرد با این مضمون :
- پدر برو و سبب زمینم هایت را بکار . این بهترین کاری بود که از اینجا می توانستم برایت انجام بدهم .

درس دوم: دامنه و برد تابع

مقادیر قابل جاگذاری تابع f که می توانیم تغییرش دهیم (x ها) را دامنه تابع گفته و با D_f نشان می دهیم و مقادیری که در اثر تغییر دامنه نتیجه میگیریم (y ها) را برد تابع می گوئیم و با R_f نشان می دهیم.

دامنه و برد در حالت های مختلف نشان دادن تابع

۱- نمایش جدولی

در این حالت اعداد ردیف بالا را در داخل مجموعه نشان داده و آنرا دامنه میگوئیم و اعداد ردیف پایین را در داخل مجموعه A جداگانه نشان داده و به آن برد می گوئیم.

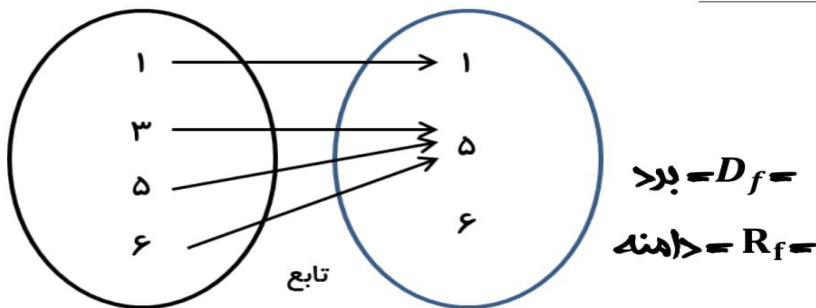
معارف	ادبیات	انگلیسی	شیمی	فیزیک	ریاضی	درس
۹	۱۸	۱۸	۲۰	۱۹	۲۰	نمره

$$D_f = \{ \dots \}$$

$$R_f = \{ \dots \}$$

۲- نمایش نموداری (نمودار پیکانی)

در این حالت همه اعدادی که در دایره A وجود دارند که فلش ها از آن خارج می شوند را در داخل مجموعه A نشان داده و به آن دامنه می گوئیم. و فقط اعدادی که اشعای یک فلش به آنها ختم شده را در داخل مجموعه A نشان داده و به آن برد می گوئیم.



$$D_f = \{ \dots \}$$

$$R_f = \{ \dots \}$$

میرموید

۸ / تابع

۳- نمایش زوج مرتب

در این حالت همه اعدادی که موفه اول (x) می باشند را در داخل یک مجموعه نوشته و به آن دامنه می گوئیم و همه اعدادی که موفه دوم (y) می باشند را در داخل یک مجموعه نوشته و به آن برد می گوئیم.

$$f = \{(1, 3), (7, 6), (10, 6), (5, 5)\}$$

$$D_f = \text{برد}$$

$$R_f = \text{دامنه}$$

۴- نمایش شکلی

در این حالت تصویر نمودارها را روی محور x ها انداخته و محدوده ای که سایه دارد و رنگی است را دامنه می گوئیم. همچنین تصویر نمودارها را روی محور y ها انداخته و محدوده ای که سایه دارد و رنگی است را برد می گوئیم.

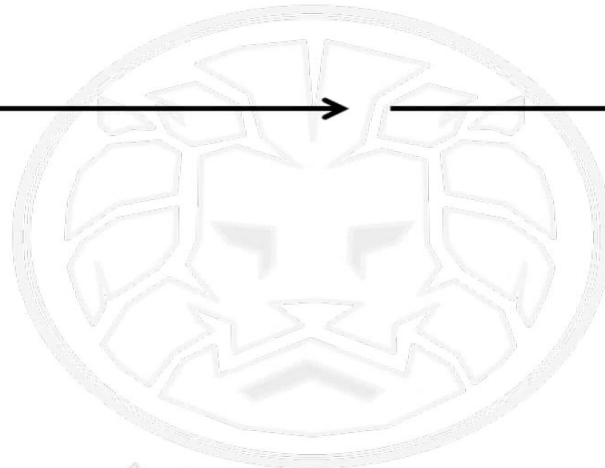
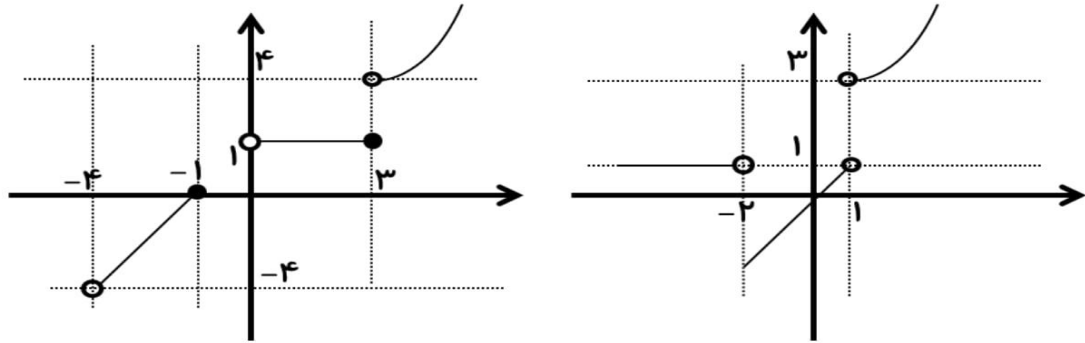
روش نموداری نمودار تعیین دامنه و برد (روش آهنربا)

الف) تعیین دامنه:

یک آهنربا روی محور x ها از منفی به سمت مثبت حرکت می دهیم. این آهنربا نقطه ها را روی محور x ها جمع می کند. در نهایت نقاطی که روی محور x ها جمع شده اند را به صورت بازه نشان می دهیم. فقط به نقاط باز و بسته دقت نمایید.

ب) تعیین برد:

یک آهنربا روی محور y ها از منفی به سمت مثبت حرکت می دهیم. این آهنربا نقطه ها را روی محور y ها جمع می کند. در نهایت نقاطی که روی محور y ها جمع شده اند را به صورت بازه نشان می دهیم. فقط به نقاط باز و بسته دقت نمایید.



میرموید

نمایش ضابطه‌ای (سایت همسرپایه)

همانطور که گفته شد محدوده x که باید از آن انتخاب شوند و غیر آن نباشند را دامنه و محدوده y که از جاگذاری x ها در ضابطه تابع بدست می آیند را برد می گویند. در مواردی اینقدر نقاط تابع ما زیاد است که ترجیح میدهیم به جای دانه x انرا به صورت یک قانون کلی بنویسیم. در مورد دامنه و برد از روی ضابطه در بخش تابع خطی بیشتر صحبت خواهیم نمود (در پایین مجموعه اول را دامنه و مجموعه دوم را هم دامنه میگوییم که برد زیر مجموعه آن است).

x	...	$1/001$	-1	0	1	$1/001$	$1/01$	$1/1$...
y	...	$-1/002$	-1	1	3	$3/002$	$3/02$	$3/2$...

$$\begin{cases} f: N \rightarrow R \\ x \rightarrow 2x+1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: N \rightarrow R \\ y = 2x+1 \end{cases}$$

فصلته: تعداد اعضای دامنه یک تابع در صورت عدهای صحیح بودن همیشه از تعداد اعضای برد آن بیشتر است.

میرموید

مقداریکتاب

مقدار یک تابع یعنی اینکه به ازای انتخاب یک عدد از دامنه این عدد با کدام عدد از برد ارتباط دارد. در حالتهاى مختلف نمایش می توان مقدار تابع را بدست آورد (روش آزمون).

نکته: یک قرار داد مهم اینست که اگر در تابعی با نام f ، زوج مرتب $(a$ و $b)$ وجود داشته باشد یا برای a از دامنه یک b از برد وجود داشته باشد در این صورت می توانیم بنویسیم:

$$f(a) = b$$

نکته: در یک تابع مقدار تابع به ازای هر چیز خواسته شده فقط یک جواب باید داشته باشد و اگر دو جواب مختلف بدست آمد آن رابطه تابع نیست و تنها یک رابطه است.

۱- نمایش جدولی

در این حالت عددی از ردیف پایین را که در زیر آن عدد دامنه داده شده قرار دارد مقدار تابع در آن نقطه می نویسیم.

ردیف اول	۳	۴	۷	۸	۱۰	۲۰
ردیف دوم	۴	۵	۸	۸	۱۰	۱۲

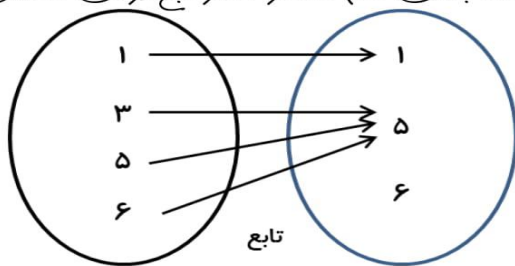
$$f(7) =$$

$$f(f(3)) =$$

$$f(f_{f_{\dots}f(7)}) =$$

۲- نمایش نموداری

در این حالت عددی که انتهای فلش خارج شده از عدد داده شده به آن ختم شده را مقدار تابع در آن نقطه می نویسیم.



میرمویذ

$$f(1) =$$

$$f(f(3)) =$$

$$f(f_{f_{\dots}f(6)}) =$$

۱۲ / تابع

۳- نمایش زوج مرتب

در این حالت موهه دوم (۷) زوج مرتب که موهه اول آن (x) عدد داده شده می باشد را مقدار تابع در آن نقطه می گوئیم.

$$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (5, 5)\} \quad f(f(1)) =$$

مثال: دامنه و برد را در تابع زیر مشخص کنید و حاصل $f(f(6))$ را بدست آورید.

$$f = \{(5, 25), (10, 24), (6, 24), (12, 26)\}$$

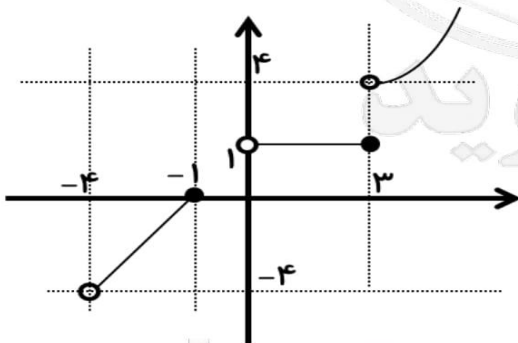
$$D_f = \{5, 10, 6, 12\}$$

$$R_f = \{25, 24, 26\}$$

$$f_{(6)} = 24$$

۴- نمایش شکلی

در این حالت یک خط عمودی در نقطه ای به طول داده شده (x) رسم میکنیم. این خط در صورت قطع کردن فقط یک نقطه را قطع میکند (شرط تابع بودن) که عرض مختصات آن نقطه را مقدار تابع در آن نقطه می گوئیم.



نکته: تصویر نمودار روی محور xها را دامنه و تصویر نمودار روی محور y را برد میگویند.

نکته: همیشه از داخل ترین f شروع میکنیم و به ترتیب آنها را پیدا می کنیم.

۵- نمایش ضابطه ای

نمایش جبری تابع

همانطور که گفته شد رابطه بین دامنه و برد (x و y) را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی نوشت که در آن حرف انگلیسی x نشان دهنده دامنه تابع و حرف انگلیسی y نشان دهنده برد تابع می‌باشد. اینگونه نمایش را نمایش جبری تابع می‌گویند. برای نشان دادن تابع به صورت جبری باید دامنه و برد آنرا هم نشان داد. (اگر دامنه و برد هر دو اعداد حقیقی باشند دیگر لازم به نوشتن نیست)

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 8), \dots, (n, 2n+1)\}$$

$$\begin{cases} f: N \rightarrow R \\ x \rightarrow 2x+1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: N \rightarrow R \\ y = 2x+1 \end{cases}$$

در حالت کلی ضابطه (رابطه) تابع را به شکل زیر نمایش میدهند که در آن A دامنه تابع و B مجموعه A که برد تابع زیر مجموعه آن می‌باشد است (هم دامنه). یعنی x فقط باید در محدوده A باشد. در نهایت $f(x)$ را قانون یا ضابطه تابع می‌گویند که به معنی آنست که تابع داریم با متغیر x .

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ x \rightarrow f(x) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

در واقع حرف y مثل نام کوچک تابع می‌باشد. اگر بخواهیم دقیقتر آنرا معرفی کنیم و بگوییم از کدام خانواده است باید از $f(x)$ استفاده کنیم که نشان میدهد از خانواده x است و این حرف در آن خانواده تغییر میکند.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$$

$$f(a) = a^3 x^2 + 2a^2 y + 4a$$

$$f(x) = y^2 x^3 + 2x^2 y + 4y$$

فکر کنید: برای مقدار دهی تابع، هر مقداری که قرار است به جای متغیر قرار بگیرد به جای x در رابطه $f(x)$ قرار میدهیم بدون اینکه اصلاً فکر کنیم که چرا. بنابراین $f(3)$ یعنی به جای x تابع عدد ۳ بگذاریم.

$$f(a) = a^2 x^3 + 2a^2 y + 4a$$

$$f_{(کلثوم)} = (کلثوم)^2 x^3 + 2(کلثوم)^2 y + 4(کلثوم)$$



تابع خطی

توابعی که بتوان آنها را به صورت $y = ax + b$ را توابع خطی هم یگویند که میتوان مثل معادله خط با آن رفتار کرد.

مثال: اگر در یک تابع خطی $f_{(1)} = 7$ و $f_{(3)} = 15$ باشد آنگاه ضابطه تابع را بدست آورید.

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} f_{(1)} = a(1) + b = 7 \\ f_{(3)} = a(3) + b = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ 3a + b = 15 \end{cases} \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4 \text{ و } b = 3$$

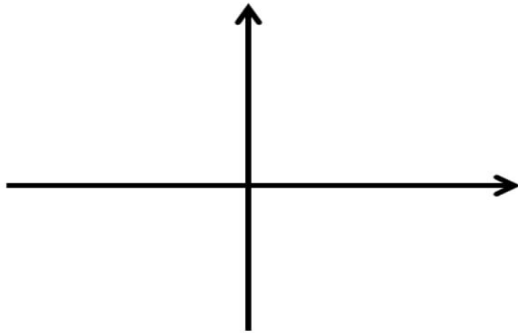
$$y = 4x + 3$$

فکت: اگر در تابع خطی دامنه برابر اعداد حقیقی R باشد آنگاه برد هم اعداد حقیقی خواهد بود. در صورتی که دامنه بخشی از اعداد حقیقی باشد آنگاه برد را از قرار دادن حدود دامنه در تابع بدست می آوریم. یعنی اگر دامنه را از هر طرف محدود نماییم برد هم از همان طرف محدود می شود.

رسم تابع خطی با دامنه مشخص

برای رسم توابع خطی که دامنه آنها به صورت تعدادی عدد جدا می باشد هر یک از اعداد را جایگزین کرده تا برد یا همان عرض نقاط بدست آید اما اگر دامنه به صورت بازه ac باشد اعداد حدود بازه را با توجه به باز یا بسته بودن آن قرار میدهیم.

مثال: تابع خطی $f(x) = 3x - 4$ با شرط $D_f = (2, +\infty)$ را رسم نمایید و برد آنرا مشخص نمایید.



فکر کنید: برد تابع خطی در یک بازه محدود ۷ همان بازه دامنه داده شده می باشد.

مثال: برد توابع زیر را مشخص کرده و آنها را رسم نمایید

میرموید

سوالات کنکور:

۱- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد آنگاه عدد a کدامست؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۸ (۴)

۷ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

۲- اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد، آنگاه $f(g_{(1-\sqrt{2})}) - g(f_{(1-\sqrt{2})})$ کدامست؟ (سراسری تجربی ۸۹)

$4\sqrt{2}$ (۴)

۴ (۳)

$4(\sqrt{2}-1)$ (۲)

$4(1-\sqrt{2})$ (۱)

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ باشد مقدار $f(f_{(-144)})$ کدامست؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

(۱) تعریف نشده

میرموید



**Some People Dream Of
Success, While
Other People Get Up
Every Morning
And
Make It Happen.**

یک سخنران معروف در مجلسی که دوستانه نظر در آن حضور داشتند، یک انگاس هزار دلاری را از جیبش بیرون آورد و پرسید: چه کسی مایل است این انگاس را داشته باشد؟ دست همه حاضرین بالا رفت.

سپس در برابر نگاه های متعجب، انگاس را میچاله کرد و پرسید: چه کسی هنوز مایل است این انگاس را داشته باشد؟ و باز هم دست های حاضرین بالا رفت.

این بار مرد، انگاس میچاله شده را به زمین انداخت و چند بار آن را لگد مال کرد و با کفش خود آن را روی زمین کشید. بعد انگاس را برداشت و پرسید: خوب، حالا چه کسی حاضر است صاحب این انگاس شود؟ و باز دست همه بالا رفت. سخنران گفت: دوستان، با این بلاهایی که من سر انگاس در آوردم، از ارزش انگاس چیزی کم نشد و همه شما خواهان آن هستید.

در زندگی واقعی هم همین طور است. ما با مشکلاتی که رویرو می شویم، خنم می شویم، میچاله می شویم، خاک آلود می شویم و احساس می کنیم که دیگر پیشیزی ارزش نداریم، ولی این گونه نیست و جدا از این که چه بلایی سرمان آمده است هرگز ارزش خود را از دست نمی دهیم و هنوز هم برای افرادی که دوستان دارند، آدم با ارزشی باشیم و هدف با ارزشی داریم...

درس سوم: انواع تابع

با توجه به ارتباط بین موفه اول و دوم هر تابع (۷ و x) چند نوع تابع خاص و پرکاربرد وجود دارد که باید آنها را بشناسیم.

۱- توابع چند جمله ای

توابعی را که ضابطه آن ها چند جمله ای های جبری از یک متغیر باشند را توابع چند جمله ای می گویند. بزرگترین توان متغیر را درجه تابع میگویند.

$$f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

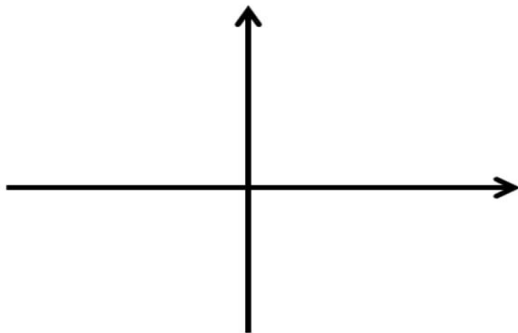
$$f(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$f(t) = 5t + 7$$

$$y = 4x^2 + 2x + 5$$

نکته: آشنا ترین توابع چند جمله ای تابع درجه اول (تابع خطی) و یا تابع درجه دوم (سهمی) می باشد. دامنه تابع درجه دوم اعداد حقیقی می باشد ولی برد آن با توجه به مثبت یا منفی بودن a میتواند به ترتیب بیشتر از عرض راست و یا کمتر از عرض نقطه راست سهمی باشد.

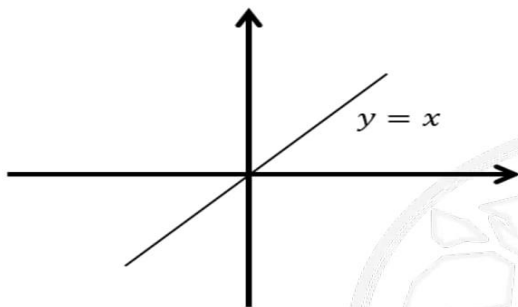
مثال: دامنه و برد تابع $f(x) = 3x^2 - 4$ را بیابید.



۲- تابع همانی (حقیقه-دوم-دوم)

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می نامند. یعنی موفه اول و دوم دقیقاً یکی باشند.

$$f(x) = y = x$$



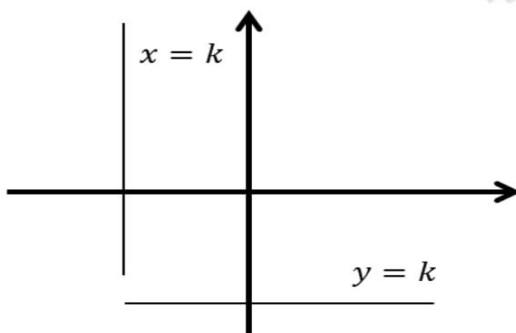
فکت: اگر دامنه تابع همانی را R در نظر بگیریم، نمودار

آن بصورت معادله خطی که نیم سز ناحیه اول و سوم است خواهد بود. اما در صورتی که دامنه این تابع محدود شود مثلاً به توابع خطی برد آن نیز محدود می شود.

۳- تابع ثابت

تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو (عدد) است را تابع ثابت می نامیم. یعنی تمام اعضای دامنه را به یک و فقط یک عضو از برد نظیر کنند. اگر k یک عدد حقیقی باشد آنگاه عبارت زیر یک تابع ثابت است

$$f(x) = y = k$$



فکت: نمودار چنین توابعی وقتی دامنه یک بازه

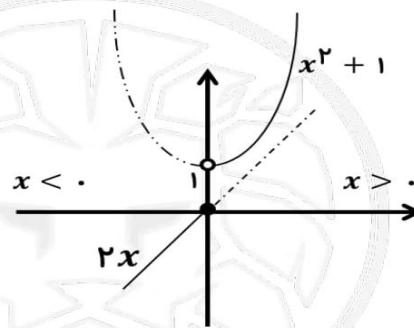
باشد خطی موازی محور طول هاست و اگر دامنه زیر مجموعه A از اعداد صحیح باشد بصورت نقاطی در دستگاه مختصات است که همگی روی یک خط موازی محور طول ها قرار دارند.

نکته : معادله خط $x = k$ یک تابع نمی باشد. چون در صورتی که نمودار آن را رسم کنیم خطوط عمودی آنرا در بینهایت نقطه قطع می کنند.

۴- تابع پیرضابطه (تابع قطعه ای)

توابعی که دارای قطعاتی از دامنه هستند که هر یک ضابطه خاصی دارند. باید توجه کرد که هر یک از ضابطه ها فقط در محدوده دامنه خودش باید اعمال گردد. مثلا هنگام رسم باید شکل ضابطه فقط در محدوده دامنه اش رسم گردد (طلاقی).

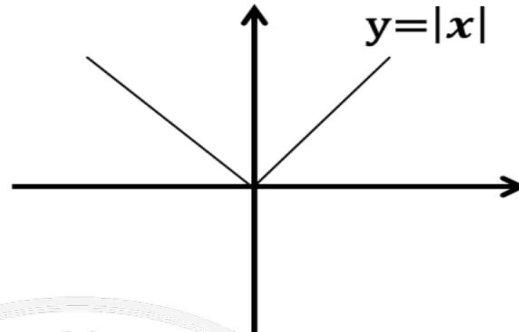
$$\begin{cases} y = 2x & , x \geq 0 \\ y = x^2 + 1 & , x < 0 \end{cases}$$



فصلنامه : برای رسم این توابع ابتدا ضابطه ها را بدون توجه به دامنه رسم میکنیم و سپس قسمت هایی که جزو دامنه آن ضابطه نیستند را حذف میکنیم.

۵- تابع قدرمطلق

تابعی که هر عدد دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می کند، تابع قدرمطلق نامیده می شود.



$$f(x) = y = |x|$$

نکته : دو قانون در مورد قدرمطلق را باید بدانیم

الف) قانون خروج از قدرمطلق: هر چیزی داخل قدرمطلق باشد برای خروج با علامت خودش خارج می شود.

$$| \text{عبارت مثبت} | = + (\text{عبارت مثبت})$$

$$| \text{عبارت منفی} | = - (\text{عبارت منفی})$$

ب) قانون جواب قدرمطلق: بدون توجه به داخل قدرمطلق، جواب آخر قدرمطلق همیشه مثبت است.

$$| \text{هر عبارتی} | = \text{عبارت مثبت}$$

دسام توابع قدر مطلق

با توجه به آنچه در مورد قدر مطلق فرا گرفتیم هر تابع قدر مطلق را میتوان به تابع چند ضابطه تبدیل کرد. این روش برای رسم این توابع بسیار کاربردی است.

گام اول: ابتدا داخل قدر مطلق را در دو حالت بزرگتر از صفر و کوچکتر از صفر تعیین علامت میکنیم تا شرط دو ضابطه بدست بیاید.

گام دوم: حال با توجه به شرط عبارت داخل قدر مطلق را با علامت منفی یا مثبت از قدر مطلق خارج میکنیم.

گام سوم: رابطه ها و شرط را ساده می نماییم.

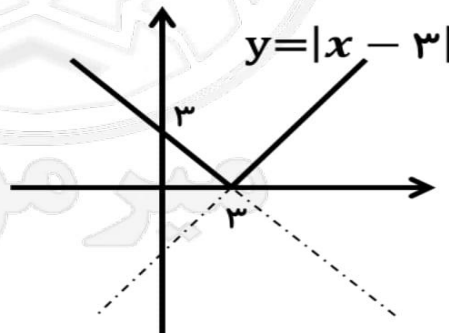
گام چهارم: نمودار هر ضابطه را رسم کرده و سپس قسمتهایی که جزء شرط هستند را قبول میکنیم.

مثال: تابع قدر مطلق زیر را رسم کنید.

$$f(x) = y = |x - 3|$$

$$\begin{cases} y = x - 3 & , x - 3 \geq 0 \\ y = -(x - 3) & , x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 & , x \geq 3 \\ y = -x + 3 & , x < 3 \end{cases}$$

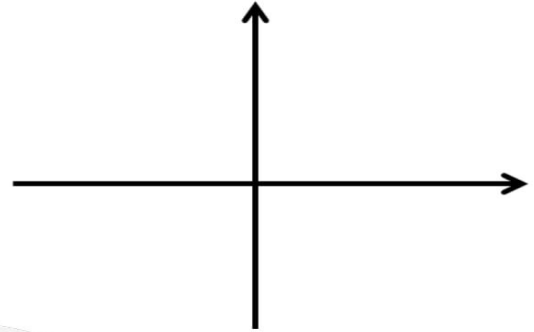


فصلته: برای رسم توابع قدر مطلق که همه عبارت داخل قدر مطلق باشد، میتوانیم ضابطه داخل آنرا رسم کنیم و

پس قسمت های بالای محور x را نگه داشته و قسمت پایین محور را نسبت به آن قرینه کنیم.

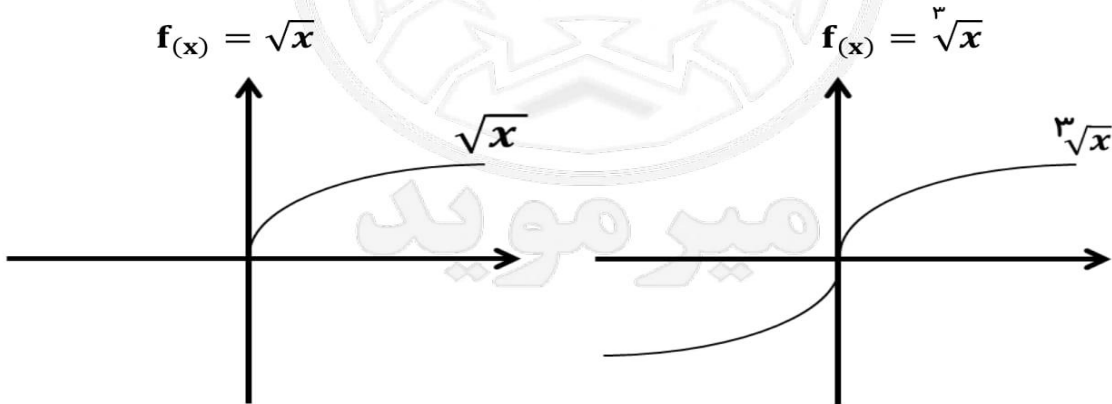
مثال: تابع قدرمطلق زیر را رسم کنید.

$$f(x) = |x^2 + 2x - 3|$$



توابع رادیکالی

دانستن شکل دو تابع رادیکالی زیر بسیار مفید است.



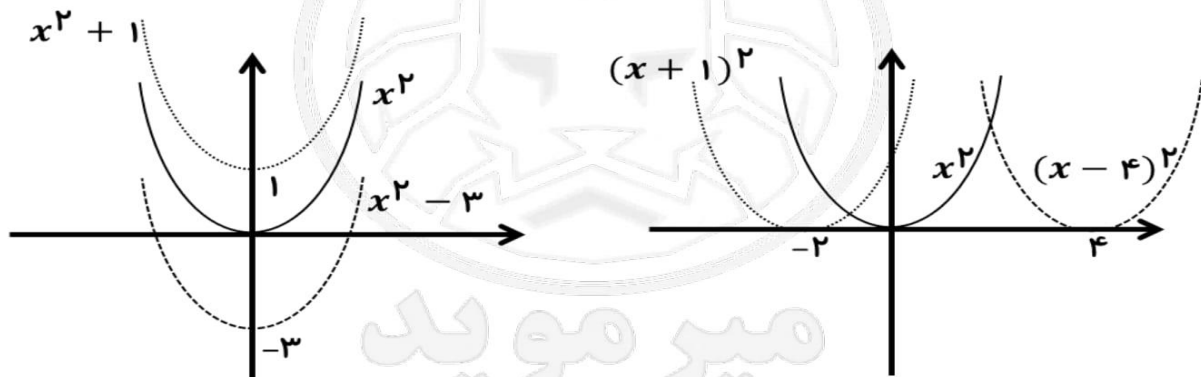
دستم‌توابع به کمک انتقال (X لاجوج، لچشمگو)

در این قسمت می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارهای جدیدی را به کمک نمودارهای قبلی رسم کنیم.

نکته: این قوانین فقط در مواردی درست است که به خود تابع یا X آن عدد کم یا زیاد شده باشد نه اینکه توانی از X.

الف) با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد به سمت بالا (جهت مثبت) می‌کشیم. اما نمودار تابع $f(x) - k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد به سمت پایین (جهت منفی) رسم می‌کنیم.

ب) با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ نمودار تابع $f(x+k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد به سمت چپ (جهت منفی) می‌کشیم. اما نمودار تابع $f(x-k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد به سمت راست (جهت مثبت) رسم می‌کنیم.



ج) با داشتن نمودار تابعی مانند $f(|x|)$ نمودار تابع را در سمت چپ (طول‌های منفی) حذف می‌کنیم و سپس هر چه قسمت مثبت‌هاست قرینه می‌کنیم به قسمت منفی‌ها می‌کشیم. (هرچون طول مثبت بگه همون)

الف) با داشتن نمودار تابعی مانند $|f(x)|$ نمودار تابع در قسمت پایین را به سمت بالا قرینه می‌کنیم (y با شخصیت همه مثبت می‌شوند).

نکته: اگر پشت یک ضابطه تابع منفی قرار بگیرد هنگام رسم آنرا نسبت به محور طولها قرینه می‌کنیم.

نکته: اگر پشت X منفی قرار گیرد، تابع نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شود.



بررسی تابع بودن یک رابطه ی جبری

معصم است بدانیم که یک ضابطه ی جبری به تنهایی چه زمانی معرف تابع است. معمولاً از مثال نقض استفاده میشود تا تابع نبودن یک عبارت جبری را ثابت کنند. به این صورت اگر x پیدا شود که با جاگذاری آن برای y دو جواب یافته شود در این صورت آن عبارت جبری تابع نیست.

مثال: آیا عبارت جبری $x = y^2$ یک تابع است؟

پس تابع نیست $\rightarrow \{(4, 2), (4, -2)\} \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow x = 4$ اگر

تغییر متغیر تابع

گاهی با داشتن $f(g(x))$ می‌توانیم $f(x)$ را بدست آوریم. برای اینکار:

گام اول: $g(x)$ را t در نظر می‌گیریم.

گام دوم: x را بر حسب t بدست می‌آوریم.

گام سوم: $f(g(x))$ را بر حسب t بدست می‌آوریم.

گام چهارم: $f(t)$ را بر حسب t بدست می‌آوریم.

گام پنجم: به جای متغیر t متغیر x را قرار می‌دهیم.

مثال: اگر $f_{(x+1)} = x^2 - x + 3$ باشد آنگاه $f(x)$ را بیابید.

میرموید

سوالات کنکور:

۱- نمودار تابع $f(x) = \left| \frac{1}{3}x \right| - 2$ ، ۴ واحد به سمت X های منفی و یک واحد به سمت Y های مثبت انتقال داده می شود. نمودار جدید و نمودار قدیم با کدام طول متقاطعند؟ (تجربی ۹۳)

- (۱) ۳/۵ (۲) -۳ (۳) -۲/۵ (۴) -۲

۲- مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای توابع $y = |x|$ و $x + 3y = 12$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۳- در کدام بازه از مقادیر X نمودار تابع $f(x) = 5 - |x - 1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد؟ (ریاضی خارج ۹۳)

- (۱) $\left(\frac{-4}{3}, 1\right)$ (۲) $\left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ (۳) $\left(\frac{-4}{3}, 2\right)$ (۴) $\left(\frac{-2}{3}, 2\right)$

۴- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور X ها را در نقطه ای به طول ۱ و محور Y ها را در نقطه ای به عرض -۶ قطع کرده و از نقطه $(-2, -6)$ می گذرد. $f_{(-1)}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۹)

- (۱) -۸ (۲) -۷ (۳) -۵ (۴) -۴

۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور X ها است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

- (۱) $a < -1$ (۲) $a > 1$ (۳) $a > 2$ (۴) $a < 2$

۶- اگر منحنی به معادله $f(x) = 2x^2 - 4x + m - 3$ محورهای X ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (ریاضی ۸۷)

- (۱) $m > 3$ (۲) $3 < m < 4$ (۳) $3 < m < 5$ (۴) $4 < m < 5$

۷- به ازای کدام مقدار a منحنی به معادله $ay = x^2 - 5x + 4$ بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟ (ریاضی ۸۵)

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹

۸- به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = 2x - 4$ بر منحنی به معادله $y = (m + 3)x^2 - mx$ مماس است؟ (ریاضی ۹۰)

- (۱) ۱۸ و -۲ (۲) ۲۲ و ۲ (۳) ۲۲ و -۲ (۴) ۱۱ و ۴

۹- مقادیر تابع $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگتر از $\frac{7}{4}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (تجربی ۸۹)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴) ۶

۱۰- منحنی به معادله $y = (2x + 1)(x + 8)$ با خط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

- (۱) $9 < m < 25$ (۲) $15 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $5 < m < 13$

۱۱- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟ (تجربی خارج ۹۳)

- (۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & , x > 3 \\ 2x + 3 & , x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۳- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) + f(1-x)$ کدام است؟ (تجربی ۸۵)

- (۱) صفر (۲) $4x$ (۳) $2x^2$ (۴) $4x^2$

۱۴- نمودار تابع با ضابطه $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ، $x > -1$ در بازه (a, b) زیر محور x ها است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۵- نمودار تابع با ضابطه $y = x^3 - ax + b$ و خط با معادله $y + 2x = b$ در نقطه ای به طول ۱ روی محور x ها متقاطع هستند. طول دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟ (تجربی ۸۹)

استاد : سید امیر میرموید

مبحث : جزوه فصل پنجم ریاضی دهم تابع

۰ و ۲ (۴)

۰ و -۱ (۳)

-۱ و ۳ (۲)

-۱ و ۲ (۱)

۱۶- اگر نمودار تابع $y = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور xها را در نقطه ای به طول ۲ قطع کند، طول های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور xها کدامند؟ (ریاضی خارج ۸۹)

$\frac{-1}{2}$ و ۳ (۴)

$\frac{3}{2}$ و -۱ (۳)

$\frac{-1}{2}$ و ۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ و -۱ (۱)

۱۷- اگر $f(x - 3) = x^2 - 4x + 5$ نگاه $f(1 - x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

$x^2 - 4x + 5$ (۴)

$x^2 + 4x + 5$ (۳)

$x^2 + 3$ (۲)

$x^2 + 1$ (۱)

